Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis III — WS 2012/13, Serie 7
Prof. Dr. G. Wang — 3.12.2012
Dr. R. Alessandroni

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es seien $f_k : X \to [0, \infty]$ messbar bezüglich eines Maßes μ auf X und

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \int_X f_k d\mu < \infty.$$

Zeigen Sie, für μ-fast alle $x \in X$ existiert eine Teilfolge $k_l \to \infty$ mit $\sup_{l \in \mathbb{N}} f_{k_l}(x) < \infty$. (Hinweis: Verwenden Sie das Lemma von Fatou.)

Aufgabe 2 (*Jensen'sche Ungleichung*) (4 Punkte)
Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(X) = 1$. Sei $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ konvex und $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Zeigen Sie, dass

$$\varphi\left(\int_X f d\mu\right) \le \int_X \varphi(f) d\mu.$$

Tipp: Nutzen Sie $\varphi(y) \ge \varphi(x) + \varphi'(x)(y - x)$ (Satz 2.4 in Analysis II).

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass aus $f_n \to f$ in $\mathcal{L}^1(\mu)$, d.h. $\int_X |f_n - f| d\mu \to 0$, schon $f_n \to f$ im Maß folgt. Folgern Sie daraus, dass es eine Teilfolge gibt, die fast überall gegen f konvergiert.
Definition. In einem Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ wird eine Folge darauf messbarer Funktionen f_n konvergent im Maß gegen eine Funktion f genannt, wenn für jedes $\epsilon > 0$ $\lim_{n\to\infty} \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \ge \varepsilon\}) = 0$ gilt.

Aufgabe 4 (*verallgemeinerte Version der majorisierten Konvergenz*) (4 Punkte)
Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und seien f_n, f messbar, so dass f_n fast überall gegen f konvergiert. Weiterhin gebe es Funktionen h_n, $h \in \mathcal{L}^1(\mu)$ derart, dass $|f_n| \le h_n$ (fast überall) und $h_n \to h$ in $\mathcal{L}^1(\mu)$. Zeigen Sie, dass für $n \to \infty$

$$\int_X |f_n - f| d\mu \to 0 \quad \text{und} \quad \int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu.$$

Tipp: Zeigen Sie zunächst f_n, $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Zeigen Sie dann die Behauptung für eine gute Teilfolge f_{n_j} indem Sie aus den h_n eine $\mathcal{L}^1(\mu)$-Majorante konstruieren. Schließen Sie dann auf die ganze Folge.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 10.12 bis 12:00**.